TD 1 - Simulation de variables aléatoires

Exercice 1. On dispose d'un dé à 6 faces. Proposer une méthode pour simuler le résultat d'un Pile ou Face. On détaillera la variable aléatoire utilisée.

Il suffit d'associer Pile aux résultats pairs et Face aux résultats impairs. Précisons ceci.
Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ l'ensemble des résultats du dé que l'on munit de la tribu pleine $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On dispose alors d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère également l'ensemble $\Omega' = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$ que l'on munit de la tribu pleine $\mathcal{F}' = \mathcal{P}(\Omega')$. On définit alors la variable aléatoire $X : \Omega \to \Omega'$ par

$$X(k) = \begin{cases} \text{Pile} & \text{si } k \text{ est pair,} \\ \text{Face} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

La loi de X est alors la mesure image de $\mathbb{P}$ par la variable aléatoire X. Cette mesure est définie par

$$\mathbb{P}(X = \text{Pile}) = \mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = \text{Face}) = \mathbb{P}(\{1,3,5\}) = \frac{1}{2}.$$

La mesure image correspond encore à la probabilité uniforme, cette fois sur Ω'. On obtient bien la résultat d'un Pile ou Face.

Exercice 2. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy si X admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que cela définit bien une loi de probabilité.

   La fonction f est mesurable, positive et vérifie

   $$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\big[\arctan(x)\big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big] = 1.$$

   C'est donc bien une densité.

2. En utilisant la méthode d'inversion, donner un moyen de simuler cette loi.

   Un calcul similaire donne la fonction de répartition F_X de X :

   $$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   La fonction F_X est donc bijective d'inverse

   $$F_X^{-1}(u) = \tan\Big(\pi\Big(u - \frac{1}{2}\Big)\Big).$$

   Ainsi, si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, alors $\tan(\pi(U-1/2))$ suit une loi de Cauchy. Cela donne une interprétation géométrique de la loi de Cauchy : c'est la tangente d'une angle tiré uniformément entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

Exercice 3. On considère une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Rappeler la loi de X et son interprétation en terme de temps d'attente.

   La loi de X correspond à la mesure de probabilité

   $$\mathbb{P}_X = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1}\delta_n\,.$$

   Autrement dit, $\mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cette loi modélise le temps d'attente avant le premier succès lorsque l'on répète de manière indépendante une expérience de Bernoulli ayant une probabilité de succès p.

2. Comment obtenir une loi géométrique à partir d'une suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires *i.i.d.* de loi de Bernoulli de paramètre p ?

   En suivant l'interprétation en terme de temps d'attente, on définit

   $$T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : B_n = 1\}\,.$$

   Montrons que T suit une loi géométrique de paramètre p. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\{T=n\}$ est réalisé si et seulement si $B_1 = \cdots = B_{n-1} = 0$ et $B_n = 1$. On en déduit alors par indépendance des B_k que

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=n) &= \mathbb{P}(B_1 = \cdots = B_{n-1} = 0, B_n = 1)\\ &= \mathbb{P}(B_1=0)\cdots\mathbb{P}(B_{n-1}=0)\mathbb{P}(B_n=1)\\ &= (1-p)^{n-1}p\,,\end{aligned}$$

   ce qui prouve que T suit une loi géométrique de paramètre p.

3. En déduire une méthode pour simuler une loi géométrique à partir d'une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires uniformes.

   On rappelle que si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, alors la variable aléatoire $B = \mathbb{1}_{\{U\leqslant p\}}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Par suite, la variable aléatoire

   $$T = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : \mathbb{1}_{\{U_n\leqslant p\}} = 1\} = \inf\{n \in \mathbb{N}^* : U_n \leqslant p\}$$

   suit une loi géométrique de paramètre p.

4. Soit E une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On considère la partie entière supérieure $Y = \lceil E \rceil$. Déterminer la loi de Y. En déduire un autre moyen de simuler une loi géométrique de paramètre p à partir d'une variable aléatoire uniforme U.

   La variable aléatoire E prend ses valeurs dans $]0,\infty[$ donc Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De plus,

   $$\mathbb{P}(Y=n) = \mathbb{P}(n-1 < E \leqslant n) = \int_{n-1}^{n} \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda n} = (e^{-\lambda})^{n-1}(1-e^{-\lambda})\,.$$

   Ainsi, Y suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\lambda}$.
   On simule alors une loi exponentielle de paramètre $\lambda = -\ln(1-p)$ avec la méthode d'inversion : $E = -\ln(U)/\lambda$. Par suite, la variable aléatoire $\lceil E \rceil$ suit une loi géométrique de paramètre p.

Exercice 4. La loi Beta de paramètres $\alpha > 1$, $\beta > 1$, notée $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$, est donnée par la densité

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,,\quad x\in[0,1]\,,$$

où B désigne la fonction beta définie par

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,.$$

À l'aide de la méthode de rejet, construisez une algorithme permettant de simuler n variables aléatoires de loi Beta(α, β).

Exercice 5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition respective F_X et F_Y. On pose $Z = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.

   La fonction de répartition de Z s'écrit

   $$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leqslant t) = \mathbb{P}(X \leqslant t, Y \leqslant t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

   L'indépendance de X et Y donne alors

   $$F_Z(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)\mathbb{P}(Y \leqslant t) = F_X(t)F_Y(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

2. En déduire une méthode pour simuler une variable aléatoire de fonction de répartition

   $$F(t) = \min(t,1)(1-e^{-t})\mathbb{1}_{]0,\infty[}(t)\,.$$

   Il suffit de reconnaître la fonction de répartition de $\max(X, Y)$ où $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ et $Y \sim \mathcal{E}(1)$ sont indépendantes. On part donc d'une variable aléatoire X de loi uniforme et d'une variable aléatoire Y de loi exponentielle (obtenue par exemple via la méthode d'inversion). On définit alors $Z = \max(X, Y)$ qui suit la loi donnée par F.

3. Déterminer la densité de cette variable aléatoire.

Exercice 6. Soit $\lambda \in]0,1[$ fixé.

1. On considère une variable aléatoire discrète Y de loi

   $$\mathbb{P}(Y = n) = (1-\lambda)\lambda^n\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

   Exprimer cette loi en fonction d'une loi connue.

   On pose $Z = Y + 1$ et alors Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi

   $$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Y = n-1) = (1-\lambda)\lambda^{n-1}\,, \quad n \geqslant 1\,.$$

   Ainsi, Z suit une loi géométrique de paramètre $1-\lambda$ et $Y = Z - 1$.

2. En se basant sur la méthode de rejet vue dans le cadre de loi à densité, proposer une méthode pour simuler une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ à partir de Y.

   Il suffit d'adapter ce qui a été vu en cours pour des variables aléatoires à densité, sauf qu'ici les densités sont calculées par rapport à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. On remarque que pour tout entier n,

   $$p_n := \mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}}{(1-\lambda)n!}\mathbb{P}(Y = n) =: \frac{e^{-\lambda}}{(1-\lambda)n!}q_n\,,$$

Il suffit alors de choisir m tel que $m \geqslant \frac{e^{-\lambda}}{(1-\lambda)n!}$, par exemple

$$m = \frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}\,.$$

On a alors bien $p_n \leqslant m q_n$ et le rapport d'acceptation est la suite (r_n) donnée par

$$r_n = \frac{p_n}{m q_n} = \frac{1}{n!}\,.$$

La méthode de rejet consiste alors à simuler $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ et Y de loi donnée à la question 1, puis de tester si $U \leqslant r_Y = 1/(Y!)$.

3. Quelle est la probabilité de rejet ?

On refait le calcul vu en cours. La probabilité de rejet vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U > r_Y) &= \mathbb{P}((U,Y) \in \{(u,n) \in [0,1] \times \mathbb{N} : u > r_n\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{u>r_n\}}\, \mathrm{d}\mathbb{P}_{(U,Y)}(u,n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{u>r_n\}}(1-\lambda)\lambda^n \mathbb{1}_{[0,1]}(u)\,\mathrm{d}u\,.\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\mathbb{P}(U > r_Y) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\lambda)\lambda^n \int_{r_n}^{1} \mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\lambda)\lambda^n(1-r_n)\,.$$

Par définition du rapport d'acceptation r_n, on en déduit que

$$\mathbb{P}(U > r_Y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n}{m} = 1 - \frac{1}{m} = 1 - (1-\lambda)e^{\lambda}\,.$$

Plus λ est proche de 0, plus cette probabilité est petite.

Exercice 7. Vous disposez d'une pièce équilibrée. Proposez une méthode pour simuler le résultat d'un dé à 6 faces.

On reprend le principe du rejet discret énoncé dans l'exercice précédent. On considère trois lancers consécutifs dont on note $\{0,\dots,7\}$ les 8 résultats possibles (Pile-Pile-Pile, Face-Pile-Pile, Face-Face-Pile, etc.), par exemple sous forme binaire avec 0 = Face et 1 = Pile. On note Y la variable aléatoire prenant ces valeurs : elle suit une loi uniforme sur $\{0,\dots,7\}$. Le lancer d'un dé correspond à une loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$, on en déduit que si X est la variable aléatoire donnant le résultat du lancer d'un dé, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{6} = \frac{8}{6} \times \mathbb{P}(Y = n)\,, \quad n = 0,\dots,7\,.$$

On choisit donc $m = 8/6$. La simulation s'effectue alors de la manière suivante : on lance trois fois notre pièce et on note le résultat obtenu (sous forme binaire). Si ce résultat est compris entre 1 et 6, on a obtenu une réalisation d'un lancer de dé, sinon on répète l'opération.
Notons que la probabilité de rejet vaut $2/8 = 1/4$, ce qui est plutôt faible.

Exercice 8. On considère deux variables aléatoires U et V indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Proposer une méthode pour simuler une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[a, b]$, avec $a < b$.

   La variable aléatoire $X = (b - a)U + a$ suit une loi uniforme sur $[a, b]$. En effet, la fonction de répartition de X vaut

$$\begin{aligned} F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) &= \mathbb{P}((b-a)U + a \leqslant x) = \mathbb{P}\Big(U \leqslant \frac{x-a}{b-a}\Big) \\ &= \frac{x-a}{b-a}\mathbb{1}_{[0,1]}\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big) + \mathbb{1}_{\{\frac{x-a}{b-a} > 1\}} = \frac{x-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x) + \mathbb{1}_{\{x>b\}}\,. \end{aligned}$$

   On reconnaît la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[a, b]$.

2. Proposer une méthode pour simuler un couple de variables aléatoires (X, Y) de loi uniforme sur le pavé $[a, b] \times [c, d]$, avec $a < b$ et $c < d$.

   On pose $X = (b - a)U + a$ et $Y = (d - c)V + c$. La question précédente assure que $X \sim \mathcal{U}([a, b])$ et $Y \sim \mathcal{U}([c, d])$. Par ailleurs, les variables aléatoires U et V étant indépendantes, X et Y le sont également. Ainsi, (X, Y) suit bien une loi uniforme sur la pavé $[a, b] \times [c, d]$.

3. Sans utiliser la méthode d'inversion, proposez une méthode pour simuler une variable aléatoire de loi uniforme discrète sur $\{1, \dots, n\}$.

   On pose $X = \lceil nU \rceil$. Comme U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, la variable aléatoire X prend les valeurs $1, \dots, n$ avec, pour tout $k = 1, \dots, n$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(\lceil nU \rceil = k) = \mathbb{P}\Big(\frac{k-1}{n} < U \leqslant \frac{k}{n}\Big) = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}\,.$$

   Ainsi, X suit bien une loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

4. Proposer une méthode de rejet pour simuler une variable aléatoire uniforme sur le disque unité à partir de U et V. Quelle est la probabilité de rejet ?

   À partir de U et V on obtient une variable aléatoire uniforme sur le pavé $[-1, 1]^2$ en considérant $X = 2U - 1$ et $Y = 2V - 1$. On considère les densités f et g des lois uniformes sur le disque $\mathcal{D}$ et sur le pavé $[-1, 1]^2$:

$$g(x, y) = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(x, y)}{\pi} \quad \text{et} \quad f(x, y) = \frac{\mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x, y)}{4}\,.$$

   L'inégalité $g \leqslant \frac{4}{\pi} f$ incite à poser $m = \frac{4}{\pi}$ et à considérer le rapport d'acceptation $r(x, y) = \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(x, y)$. La méthode de rejet revient alors à tester si une variable aléatoire uniforme A sur $[0, 1]$ vérifie $A \leqslant \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(X, Y)$: l'inégalité est vraie si (X, Y) est dans $\mathcal{D}$ et fausse sinon (en fait A ne sert à rien). Bref, il suffit de simuler (X, Y) dans le pavé et de garder ce point s'il tombe dans le disque. La probabilité de rejet correspond alors à la probabilité de tomber hors du disque, soit $1 - \pi/4 \approx 0.21$.

5. Montrer que le couple de variables aléatoires $(X, Y) = (\sqrt{U}\cos(2\pi V), \sqrt{U}\sin(2\pi V))$ suit également une loi uniforme sur le disque unité. On pourra utiliser la technique de la fonction muette.

   Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Alors

$$\mathrm{E}[h(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} h(\sqrt{u}\cos(2\pi v), \sqrt{u}\sin(2\pi v))\mathbb{1}_{[0,1]}(u)\mathbb{1}_{[0,1]}(v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,.$$

Le changement de variables $(r,\theta) = (\sqrt{u}, 2\pi v) \iff (r^2, \frac{\theta}{2\pi}) = (u,v)$ donne alors

$$\int_{[0,1]^2} h(\sqrt{u}\cos(2\pi v), \sqrt{u}\sin(2\pi v))\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^{2\pi} h(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \frac{r}{\pi}\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,.$$

Dans cette dernière expression, on reconnaît la transformation polaire vue en cours, ici restreinte au rayon $r \leqslant 1$. On obtient ainsi l'égalité

$$\mathrm{E}[h(X,Y)] = \int_0^1 \int_0^{2\pi} h(r\cos(\theta), r\sin(\theta) \frac{r}{\pi}\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{D}} h(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Ceci prouve que la densité de (X,Y) est $\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{D}}(x,y)}{\pi}$, donc que ce vecteur suit une loi uniforme sur le disque.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire de densité $f : x \mapsto \max(0, 1-|x|)$. Construire une méthode de simulation de X à l'aide de

1. la méthode d'inversion,

   Le calcul de la fonction de répartition ne pose pas de problème :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2} & \text{si } -1 \leqslant x < 0, \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

   Si $u \in]0, 1/2[$, alors l'équation $F_X(x) = u$ se réécrit

$$x^2 + 2x + 1 - 2u = 0\,.$$

   Le discriminant de ce trinôme est $8u$ et l'unique solution dans $]-1,0[$ est alors $F_X^{\leftarrow}(u) = \sqrt{2u} - 1$. De manière analogue, on trouve pour le cas $u \in]1/2, 1[$ la solution $F_X^{\leftarrow}(u) = 1 - \sqrt{2(1-u)}$.

   La méthode d'inversion consiste alors à simuler une variable aléatoire uniforme U sur $[0,1]$ et à poser $X = F_X^{\leftarrow}(U)$.

2. la méthode de rejet.

   Pour la méthode de rejet, on choisit une densité uniforme g sur $[-1,1]$ qui vérifie

$$f(x) = \max(0, 1-|x|) \leqslant 2\frac{\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)}{2} = 2g(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

   On peut donc choisir ici $m = 2$. La méthode de rejet consiste alors à simuler une loi uniforme U sur $[0,1]$ et une loi uniforme Y sur $[-1,1]$, et à tester si $U \leqslant 1 - |Y|$. Si oui on garde Y, sinon on répète l'opération.

Exercice 10. Soit X un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ et $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ un borélien de $\mathbb{R}^d$. On suppose que $p = \mathbb{P}(X \in B) > 0$. On rappelle que la loi de X sachant B est définie via

$$\mathbb{P}_{X|B}(A) = \mathbb{P}(X \in A \mid X \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A \cap B)}{p}\,, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\,.$$

On suppose que l'on sait générer suivant la loi de X et on souhaite générer suivant la loi $\mathbb{P}_{X|B}$.

1. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires suivant la loi de X. Déterminer la loi de
$$N = \min\{n \geqslant 1 : X_n \in B\}\,.$$

   Soit $n \geqslant 1$. L'événement $\{N = n\}$ est réalisé si et seulement si les $n-1$ premières variables aléatoires X_i ne sont pas dans B et que X_n l'est. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$,
$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(X_1 \notin B, \ldots, X_{n-1} \notin B, X_n \in B)$$
   Par indépendance des X_k, on obtient alors
$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(X_1 \notin B) \cdots \mathbb{P}(X_{n-1} \notin B)\mathbb{P}(X_n \in B) = (1-p)^{n-1}p\,,$$
   ce qui prouve que N suit une loi géométrique de paramètre p.

2. Montrer que X_N suit la loi $\mathbb{P}_{X|B}$. En déduire une méthode pour simuler une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_{X|B}$.

   En reprenant mutatis mutandis le calcul précédent, on obtient la relation
$$\mathbb{P}(N = n, X_n \in A) = \mathbb{P}(X_1 \notin B) \cdots \mathbb{P}(X_{n-1} \notin B)\mathbb{P}(X_n \in A \cap B) = (1-p)^{n-1}\mathbb{P}(X \in A \cap B)\,.$$
   On conclut alors par σ-additivité :
$$\mathbb{P}(X_N \in A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_N \in A, N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1}\mathbb{P}(X \in A \cap B)\,.$$
   On reconnaît la somme d'une série géométrique :
$$\mathbb{P}(X_N \in A) = \frac{\mathbb{P}(X \in A \cap B)}{p} = \mathbb{P}_B(X \in A)\,.$$
   En pratique, on simule X et si $X \in B$ on le garde, sinon on simule une nouvelle réalisation de X et on répète la procédure.

Exercice 11. Soit F une fonction de répartition continue.

1. Montrer l'égalité $F \circ F^{\leftarrow}(u) = u$ pour tout $u \in]0,1]$.

   Rappelons l'équivalence prouvée en cours. Pour $u \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$, on a
$$F^{\leftarrow}(u) \leqslant x \iff u \leqslant F(x)\,.$$
   En prenant $x = F^{\leftarrow}(u)$ on obtient alors $u \leqslant F(F^{\leftarrow}(u))$. De même, en prenant $x = F^{\leftarrow}(u) - \epsilon$, pour $\epsilon > 0$, on obtient $u > F(F^{\leftarrow}(u) - \epsilon)$. Comme F est supposée continue en $F^{\leftarrow}(u) > 0$, on obtient, en faisant tendre ϵ vers 0, l'inégalité $u \geqslant F(F^{\leftarrow}(u))$. On conclut alors que $F(F^{\leftarrow}(u)) = u$. Si $u = 1$, alors soit $F^{\leftarrow}(u) = \infty$ et l'égalité $F(F^{\leftarrow}(u)) = u$ est bien vérifiée, soit $F^{\leftarrow}(u) < \infty$ et on reprend la démonstration précédente.

2. Soit X une variable aléatoire ayant une fonction de répartition F_X continue. Montrer que la variable aléatoire $F_X(X)$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

   On considère une variable aléatoire U uniforme sur $[0,1]$. On sait d'après le cours que $X \overset{\mathcal{L}}{=} F_X^{\leftarrow}(U)$. La question précédente assure alors que $F_X(X) \overset{\mathcal{L}}{=} F_X(F_X^{\leftarrow}(U)) = U$, ce qui prouve que $F_X(X)$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

3. Que se passe-t-il si on enlève l'hypothèse de continuité de F_X ?

   Supposons que F_X présente une discontinuité en x_0. Alors X ne prend aucune valeur comprise entre $F_X(x_0-)$ et $F(x_0)$, donc la variable $F_X(X)$ non plus : elle ne peut alors pas suivre une loi uniforme. Par exemple, si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, alors $F_X(X)$ ne prend que les valeurs $1/2$ et 1, et ce de manière équiprobable.