TD 3 - Méthode de Monte Carlo

Exercice 1. On veut approcher la valeur de π en utilisant une méthode de Monte-Carlo à partir de l'une des deux intégrales suivantes :

$$I_1 = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leqslant 1\}}dxdy$$

1. Montrer que $I_1 = I_2 = \pi$. Que représentent ces intégrales d'un point de vue géométrique ?

   L'intégrale $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ représente l'aire du quart de disque unité soit $\pi/4$. (La courbe représentative de la fonction définie sur $[0,1]$ par $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est le quart de cercle de rayon 1 et de centre l'origine du repère orthonormé.) Ainsi $I_1 = 4\times\pi/4 = \pi$.
   De façon plus calculatoire, on fait le changement de variable $x = \sin\theta$

$$\begin{aligned} I_1 &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2i\theta}+e^{-i2\theta}+2d\theta \\ &= \left[\frac{e^{2i\theta}}{2i}+\frac{e^{-2i\theta}}{2i}+2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{i}{2i}+\frac{-i}{2i}+\pi \;=\; \pi. \end{aligned}$$

   Pour l'intégrale I_2, on fait le changement de variables coordonnées cartésiennes - coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leqslant 1\}}dxdy \\ &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}d\theta = \pi \end{aligned}$$

   Quant à I_2, cette intégrale double représente l'aire du disque unité.

2. Exprimer I_1 et I_2 comme des espérances.

   Exprimons I_1 comme une espérance :

$$I_1 = 4\mathbb{E}\left(\sqrt{1-X^2}\right) \quad \text{où } X \sim U(0,1)$$

   et pour I_2 remarquons qu'en prenant $X \sim U(-1,1)$ et $Y \sim U(-1,1)$ indépendantes, on a

$$\mathbb{P}\left(X^2+Y^2\leqslant 1\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X^2+Y^2\leqslant 1\}}\right) = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leqslant 1\}}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}dxdy = \frac{1}{4}I_2$$

   d'où :

$$I_2 = 4\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X^2+Y^2\leqslant 1\}}\right)$$

3. Écrire le pseudo code des algorithmes qui calculent les approximations $I_{1,n}$ et $\hat{I}_{2,n}$ de π par méthode de Monte-Carlo, appliquée à I_1 et à I_2.

On approche I_1 par $\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-X_i^2}$ où $X_1,\cdots,X_n$ sont i.i.d de loi $U(0,1)$

Algorithm 1 : Approximation de I_1.

Entrée : une taille d'échantillon n

(a) Générer X_1, X_2, ..., X_n selon une loi uniforme sur $[0,1]$

(b) Calculer $Y_1=\sqrt{1-X_1}$, ..., $Y_n=\sqrt{1-X_n}$

Sortie : renvoyer la moyenne arithmétique des Y_1, Y_2, ..., Y_n et la multiplier par 4.

On approche I_2 par $\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{X^2+Y^2\leqslant 1\}}$ où $X_1,\cdots,X_n$ sont i.i.d de loi $U(-1,1)$ et $Y_1,\cdots,Y_n$ sont i.i.d de loi $U(-1,1)$

Entrée : une taille d'échantillon n

(a) $S\leftarrow 0$

(b) Générer X_1, X_2, ..., X_n selon une loi uniforme sur $[-1,1]$

(c) Générer Y_1, Y_2, ..., Y_n selon une loi uniforme sur $[-1,1]$

(d) Pour i allant de 1 à n : SI $X_i^2+Y_i^2$ est inférieur ou égal à 1 ALORS $S\leftarrow S+1$ FIN SI FIN de boucle i

Sortie : Retourner la valeur $\frac{4S}{n}$.

Exercice 2. Supposons que nous souhaitions estimer la probabilité qu'une variable aléatoire $X\sim\text{Cauchy}(0,1)$ soit plus grande que 2.

1. Calculer $I=\mathbb{P}(X\geqslant 2)$.

$$I=\mathbb{P}(X\geqslant 2)=\int_2^\infty \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=-\frac{\arctan 2}{\pi}+\frac{1}{2}\approx 0.148.$$

2. Trouver un estimateur basique par Monte–Carlo pour I et déterminer sa variance.

L'estimateur par Monte–Carlo classique s'écrit

$$I_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{X_i>2\}},\qquad X_1,\dots,X_n\overset{\text{iid}}{\sim}\text{Cauchy}(0,1),$$

et sa variance est

$$\text{Var}(I_n)=\frac{\text{Var}(\mathbb{1}_{\{X>2\}})}{n}=\frac{I(1-I)}{n}\approx\frac{0.126}{n}$$

3. Trouver un estimateur antithétique (simple) pour I et déterminer sa variance.

Puisqu'une $\text{Cauchy}(0,1)$ est symétrique autour de 0, un estimateur antithétique s'écrit alors

$$I_n^a=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{1}_{\{X_i>2\}}+\mathbb{1}_{\{-X_i>2\}}\right)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\{|X_i|>2\}},\qquad X_1,\dots,X_n\overset{\text{iid}}{\sim}\text{Cauchy}(0,1),$$

et sa variance est

$$\text{Var}(I_n^a)=\frac{\text{Var}(\mathbb{1}_{\{|X|>2\}})}{4n}=\frac{2I(1-2I)}{4n}=\frac{I(1-2I)}{2n}\approx\frac{0.052}{n}.$$

4. Montrer que
$$\tilde{I}_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\pi(1+X_i^2)}, \qquad X_i \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,2),$$
est un estimateur sans biais de I, i.e., $\mathbb{E}[\tilde{I}_n] = I$ et calculer sa variance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\tilde{I}_n] &= \frac{1}{2} - \mathbb{E}\left[\frac{2}{\pi(1+X^2)}\right] = \frac{1}{2} - \int_0^2 \frac{1}{\pi(1+u^2)}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\pi(1+u^2)}\mathrm{d}u - \int_0^2 \frac{1}{\pi(1+u^2)}\mathrm{d}u \\
&= I.
\end{aligned}$$

Pour la variance maintenant
$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\tilde{I}_n) &= \frac{4}{\pi^2 n}\mathrm{Var}\{(1+X^2)^{-1}\} \\
&= \frac{4}{\pi^2 n}\left[\mathbb{E}\{(1+X^2)^{-2}\} - \mathbb{E}\{(1+X^2)^{-1}\}^2\right].
\end{aligned}$$

Or on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{(1+X^2)^{-2}\} &= \frac{1}{2}\int_0^2 (1+x^2)^{-2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{(1+x^2)}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}[\arctan x]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^2}}_{v'}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}[\arctan x]_0^2 - \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2(1+x^2)}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{2(1+x^2)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{10} + \frac{1}{4}\arctan 2.
\end{aligned}$$

On en déduit donc que
$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\tilde{I}_n) &= \frac{4}{\pi^2 n}\left\{\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\arctan 2 - \left(\frac{\arctan 2}{2}\right)^2\right\} \\
&\approx \frac{0.0285}{n}.
\end{aligned}$$

5. Faire de même pour l'estimateur
$$\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{2\pi(1+X_i^2)}\right\}, \qquad X_1,\ldots,X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1/2).$$

C'est à peu près la même chose. On a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{I}_n] &= 2\int_0^{1/2} \frac{1}{2\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x \overset{x\mapsto x^{-1}}{=} \int_2^\infty \frac{1}{\pi x^2(1+x^{-2})}\mathrm{d}x \\
&= \int_2^\infty \frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x \\
&= I.
\end{aligned}$$

Puisque l'on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left\{\frac{1}{2\pi(1+X^2)}\right\} &= \mathbb{E}\left\{\frac{1}{4\pi^2(1+X^2)^2}\right\} - \psi^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\times 2\left[\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x\right]_0^{1/2} - I^2 \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2}{5}+\arctan\frac{1}{2}\right) - I^2 \\ &\approx 9.55\times 10^{-5},\end{aligned}$$

et donc

$$\mathrm{Var}(\hat{I}_n) \approx \frac{9.55\times 10^{-5}}{n}.$$

Ce dernier estimateur est, à n fixé, environ 23 fois plus précis que notre premier estimateur.

Exercice 3. L'expérience originelle de Buffon pour approcher π consistait à jeter une aiguille de longueur ℓ sur une grille de ligne parallèles, les lignes étant distantes de d, et compter le nombre de fois où l'aiguille croise une ligne.

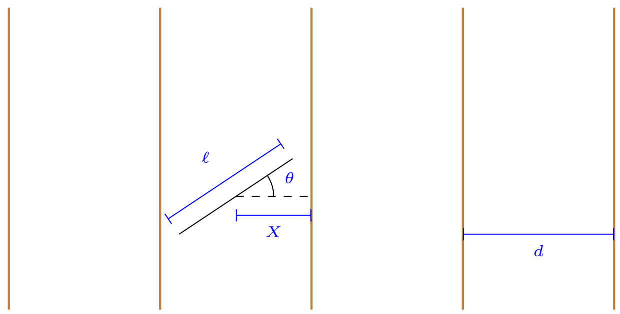

FIGURE 1 – L'aiguille de Buffon. Ici l'aiguille est de longueur ℓ et les lignes parallèles espacées de d. Les variables aléatoires X et θ représentent respectivement la distance du milieu de l'aiguille à la ligne la plus proche et l'angle formé avec l'axe horizontal.

1. Montrez que, pour $\ell \leqslant d$, la probabilité que l'aiguille soit à cheval sur une ligne est $2\ell/(\pi d)$. En déduire un estimateur pour $I = 1/\pi$.

   D'après la Figure 1 et puisque l'aiguille est jetée complètement au hasard, cela définit deux v.a. $X \sim U[0, d/2]$ et $\theta \sim U[-\pi/2, \pi/2]$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{aiguille à cheval}) = \mathbb{P}\left(\frac{\ell}{2}\cos\theta \geqslant X\right) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{\ell\cos(\theta)/2}\frac{2}{d}\mathrm{d}x\frac{1}{\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\ell\cos\theta}{d\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2\ell}{d\pi}\end{aligned}$$

   D'après l'équation précédente on a donc que

$$\pi^{-1} = \frac{d\mathbb{P}(\text{aiguille à cheval})}{2\ell},$$

   et un estimateur de $I = 1/\pi$ est donc

$$I_n = \frac{d}{2\ell n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\ell\cos\theta_i \geqslant 2X_i\}}, \qquad (X_1,\theta_1),\dots,(X_n,\theta_n) \overset{\text{iid}}{\sim} U[0,d/2]\times U[-\pi/2,\pi/2].$$

2. Trouvez la variance de cet estimateur et déduisez en un choix optimal pour ℓ et d.

   La variance se trouve en calculant
   $$\mathrm{Var}(I_n) = \frac{d^2}{4\ell^2 n}\mathrm{Var}(\mathbb{1}_{\{\ell\cos\theta_i \geqslant 2X_i\}}) = \frac{I}{n}\left(\frac{d}{2\ell} - I\right),$$
   et le choix optimal pour ℓ et d, i.e., celui minimisant la variance correspond au cas où $\ell = d$, puisque ℓ ne peut pas être strictement plus grand que d.

3. Avec ce choix optimal, construisez un estimateur de π.

   Lorsque $\ell = d = 1$, un estimateur de π est alors
   $$\hat{\pi}_n = 2n\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\cos\theta_i \geqslant 2X_i\}}\right)^{-1}, \qquad (X_1,\theta_1),\ldots,(X_n,\theta_n) \overset{\text{iid}}{\sim} U[0,1/2]\times U[-\pi/2,\pi/2].$$

Exercice 4. Soit $Z \sim N(0,1)$. Nous cherchons à évaluer la probabilité $I = \mathbb{P}(Z > 4.5)$.

1. Donnez un estimateur basique pour I.

   L'estimateur est
   $$I_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Z_i > 4.5\}}, \qquad Z_1,\ldots,Z_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$$

2. Soit $Y = 4.5 + E$ où $E \sim \mathrm{Exp}(1)$. Déterminez la densité de probabilité h de Y et trouvez comment simuler des réalisations de Y.

   Soit $y > 4.5$, on a
   $$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(E \leqslant y - 4.5) = 1 - \exp(-y + 4.5)$$
   et la densité en dérivant par rapport à y, i.e.,
   $$h(y) = \exp\{-(y-4.5)\}, \qquad y \geqslant 4.5$$
   On simule facilement selon l'algorithme
   (a) Simuler $E \sim \mathrm{Exp}(1)$ (via la fonction de répartition inverse)
   (b) Retournez $Y = 4.5 + E$.

3. Trouvez un estimateur par échantillonnage préférentiel de I basés sur des tirages de Y.

   D'après le cours, on a
   $$\begin{aligned}
   I &= \mathbb{P}(Z > 4.5)\\
   &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z>4.5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}dz\\
   &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{z>4.5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\exp\{-(z-4.5)\}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}\exp\{-(z-4.5)\}dz\\
   &= \mathbb{E}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{Y^2}{2} + Y - 4.5\right\}]
   \end{aligned}$$
   puisque $\mathbb{P}(Y > 4.5) = 1$. L'estimateur est alors
   $$I_n^e = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{Y_i^2}{2} + Y_i - 4.5\right\}.$$

Exercice 5. On veut utiliser la méthode de Monte Carlo pour calculer le prix C d'une option européenne d'achat (call) au temps 0 dans le modèle de Black et Scholes. Une option européenne est un actif financier caractérisé par un prix d'exercice K, une date échéance T et un actif risqué de valeur initiale x suivant le modèle de Black et Scholes. Son prix s'exprime par la formule

$$C \;=\; \mathbb{E}\left[\left(x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X-\frac{\sigma^2 T}{2}} - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+\right],$$

où X est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite et $(\cdot)_+$ désigne la partie positive, r est le taux d'intérêt sans risque, et σ la volatilité du modèle de Black et Scholes.

1. Donner un estimateur basique de C.

   L'estimateur Monte Carlo basique est

   $$C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X_k-\frac{\sigma^2 T}{2}} - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+,$$

   avec X_k iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2. Donner un estimateur de antithétique simple de C.

   La loi normale centrée réduite est symétrique. On peut donc poser

   $$C_n^a = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X_k-\frac{\sigma^2 T}{2}} - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+ + \left(x\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T}X_k-\frac{\sigma^2 T}{2}} - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+,$$

   avec X_k iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

   Dans toute la suite, on suppose que $x = K$ et $r = \sigma^2/2$.

3. Montrer que

   $$C = \frac{x\mathrm{e}^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{E}\Big[\frac{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{2TU}} - 1}{\sqrt{2U}}\Big],$$

   où U est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

   En utilisant $x = K$ et $r = \sigma^2/2$, il vient

   $$\begin{aligned} C &= \mathbb{E}\left[\left(x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X-\frac{\sigma^2 T}{2}} - x\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 T}{2}}\right)_+\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X} - 1\right)_+\right] \\ &= x\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 T}{2}}\mathbb{E}[(\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X} - 1)\mathbb{1}_{\{X\geqslant 0\}}] \end{aligned}$$

   car l'exponentielle dépasse 1 si et seulement si X est positif. En faisant le changement de variable $u = y^2/2$ on obtient

   $$\begin{aligned} C &= \frac{x\mathrm{e}^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}y} - 1)\mathrm{e}^{-y^2/2}dy \\ &= \frac{x\mathrm{e}^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}\sqrt{2u}} - 1}{\sqrt{2u}}\mathrm{e}^{-u}du \\ &= \frac{x\mathrm{e}^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{E}\Big[\frac{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{2TU}} - 1}{\sqrt{2U}}\Big] \end{aligned}$$

   où U est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1.

4. En déduire un nouvel estimateur d'échantillonnage préférentiel de C.

   On a
$$C_n^e = \frac{x\mathrm{e}^{-rT}}{n\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^n \frac{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{2TU_k}} - 1}{\sqrt{2U_k}},$$
   avec U_k iid de loi $\mathscr{E}(1)$.

5. Dans le modèle de Balck et Scholes, le prix P d'une option européenne de vente (put) au temps 0 avec prix d'exercice K, date échéance T et actif risqué de valeur initiale x est
$$P \;=\; \mathbb{E}\left[\left(K\mathrm{e}^{-rT} - x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X - \frac{\sigma^2 T}{2}}\right)_+\right].$$
   Démontrer la relation de parité call-put : $C = P + x(1 - \mathrm{e}^{-rT})$.

   On a
$$\begin{aligned}
C - P &= \mathbb{E}\left[\left(x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X-\frac{\sigma^2 T}{2}} - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+\right] - \mathbb{E}\left[\left(K\mathrm{e}^{-rT} - x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X-\frac{\sigma^2 T}{2}}\right)_+\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X-\frac{\sigma^2 T}{2}} - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+ - \left(x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X-\frac{\sigma^2 T}{2}} - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_-\right] \\
&= \mathbb{E}\left[x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X-\frac{\sigma^2 T}{2}} - K\mathrm{e}^{-rT}\right] \\
&= x\mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X} - 1\right]
\end{aligned}$$
   Or
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}x}\mathrm{e}^{x^2/2}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T})^2}dx \\
&= \mathrm{e}^{\sigma^2 T/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x-\sigma\sqrt{T})^2}dx \\
&= \mathrm{e}^{\sigma^2 T/2} \;=\; \mathrm{e}^{rT}.
\end{aligned}$$
   donc on a
$$\begin{aligned}
C - P &= x\mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X} - 1\right] \\
&= x\mathrm{e}^{-rT}(\mathrm{e}^{rT} - 1) \;=\; x(1 - \mathrm{e}^{-rT}).
\end{aligned}$$

6. En déduire un estimateur par variable de contrôle de C.

   A partir de la relation de parité call-put $C = P + x(1 - \mathrm{e}^{-rT})$, on peut estimer C par
$$C_n^c = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(K\mathrm{e}^{-rT} - x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X_k - \frac{\sigma^2 T}{2}}\right)_+ + x(1 - \mathrm{e}^{-rT}),$$
   avec X_k iid de loi $\mathscr{N}(0, 1)$.