TD 3 - Méthode de Monte Carlo

Exercice 1. On veut approcher la valeur de π en utilisant une méthode de Monte-Carlo à partir de l'une des deux intégrales suivantes :

$$I_1 = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x^2+y^2\leqslant 1\}}dxdy$$

1. Montrer que $I_1 = I_2 = \pi$. Que représentent ces intégrales d'un point de vue géométrique ?
2. Exprimer I_1 et I_2 comme des espérances.
3. Écrire le pseudo code des algorithmes qui calculent les approximations $I_{1,n}$ et $\hat{I}_{2,n}$ de π par méthode de Monte-Carlo, appliquée à I_1 et à I_2.

Exercice 2. Supposons que nous souhaitions estimer la probabilité qu'une variable aléatoire $X \sim \text{Cauchy}(0,1)$ soit plus grande que 2.

1. Calculer $I = \mathbb{P}(X \geqslant 2)$.
2. Trouver un estimateur basique par Monte–Carlo pour I et déterminer sa variance.
3. Trouver un estimateur antithétique (simple) pour I et déterminer sa variance.
4. Montrer que
$$\tilde{I}_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{2}{\pi(1+X_i^2)}, \qquad X_i \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,2),$$
est un estimateur sans biais de I, i.e., $\mathbb{E}[\tilde{I}_n] = I$ et calculer sa variance.
5. Faire de même pour l'estimateur
$$\hat{I}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left\{\frac{1}{2\pi(1+X_i^2)}\right\}, \qquad X_1,\dots,X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1/2).$$

Exercice 3. L'expérience originelle de Buffon pour approcher π consistait à jeter une aiguille de longueur ℓ sur une grille de ligne parallèles, les lignes étant distantes de d, et compter le nombre de fois où l'aiguille croise une ligne.

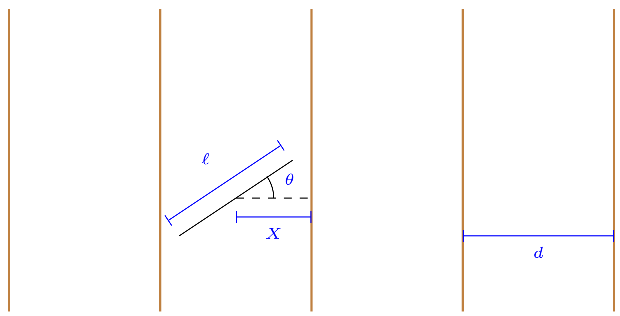

Figure 1 – L'aiguille de Buffon. Ici l'aiguille est de longueur ℓ et les lignes parallèles espacées de d. Les variables aléatoires X et θ représentent respectivement la distance du milieu de l'aiguille à la ligne la plus proche et l'angle formé avec l'axe horizontal.

1. Montrez que, pour $\ell \leqslant d$, la probabilité que l'aiguille soit à cheval sur une ligne est $2\ell/(\pi d)$. En déduire un estimateur pour $I = 1/\pi$.
2. Trouvez la variance de cet estimateur et déduisez en un choix optimal pour ℓ et d.
3. Avec ce choix optimal, construisez un estimateur de π.

Exercice 4. Soit $Z \sim N(0,1)$. Nous cherchons à évaluer la probabilité $I = \mathbb{P}(Z > 4.5)$.

1. Donnez un estimateur basique pour I.
2. Soit $Y = 4.5 + E$ où $E \sim \mathrm{Exp}(1)$. Déterminez la densité de probabilité h de Y et trouvez comment simuler des réalisations de Y.
3. Trouvez un estimateur par échantillonnage préférentiel de I basés sur des tirages de Y.

Exercice 5. On veut utiliser la méthode de Monte Carlo pour calculer le prix C d'une option européenne d'achat (call) au temps 0 dans le modèle de Black et Scholes. Une option européenne est un actif financier caractérisé par un prix d'exercice K, une date échéance T et un actif risqué de valeur initiale x suivant le modèle de Black et Scholes. Son prix s'exprime par la formule

$$C \quad = \quad \mathbb{E}\left[\left(x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X - \frac{\sigma^2 T}{2}} - K\mathrm{e}^{-rT}\right)_+\right],$$

où X est une variable aéatoire de loi normale centrée réduite et $(\cdot)_+$ désigne la partie positive, r est le taux d'intérêt sans risque, et σ la volatilité du modèle de Black et Scholes.

1. Donner un estimateur basique de C.
2. Donner un estimateur de antithétique simple de C. Dans toute la suite, on suppose que $x = K$ et $r = \sigma^2/2$.
3. Montrer que
$$C = \frac{x\mathrm{e}^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{2TU}} - 1}{\sqrt{2U}}\right],$$
où U est une variable aéatoire de loi exponentielle de paramètre 1.
4. En déduire un nouvel estimateur d'échantillonnage préférentiel de C.
5. Dans le modèle de Balck et Scholes, le prix P d'une option européenne de vente (put) au temps 0 avec prix d'exercice K, date échéance T et actif risqué de valeur initiale x est
$$P \quad = \quad \mathbb{E}\left[\left(K\mathrm{e}^{-rT} - x\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}X - \frac{\sigma^2 T}{2}}\right)_+\right].$$
Démontrer la relation de parité call-put : $C = P + x(1 - \mathrm{e}^{-rT})$.
6. En déduire un estimateur par variable de contrôle de C.